Carpeta de Matemática 2

Nueva edición ampliada y actualizada

**CUADERNILLO 5**

# Nueva carpeta de Matemática V

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Mónica Real - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

**5. Cónicas** 3
*Revisión inicial* ..... 4
Secciones cónicas ..... 5
Circunferencia ..... 6
Distancia entre dos puntos ..... 7
Elipse ..... 8
Hipérbola ..... 9
Parábola ..... 10
*En el mundo real* ..... 11
Historia de las secciones cónicas ..... 11
Trayectorias elípticas ..... 12
*Más actividades* ..... 13
*Autoevaluación* ..... 14
*Actividades integradoras* ..... 15

AIQUE

**Este CUADERNILLO 5 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática V.**
**No puede venderse por separado.**

**DIRECCIÓN EDITORIAL**
Teresita Valdettaro

**COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA**
Ruth Schaposchnik

**EDICIÓN**
Gustavo Zorzoli

**CORRECCIÓN**
Cecilia Biagioli (coordinación)
Mercedes Seara

**SUPERVISIÓN GRÁFICA**
Verónica Uher
Victoria Maier

**COORDINACIÓN GRÁFICA**
Constanza Di Gregorio - Silvina Roveda

**DIAGRAMACIÓN**
Constanza Di Gregorio - Silvana López

**ILUSTRACIONES**
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

**FOTOGRAFÍA**
Archivo Aique

**PRODUCCIÓN INDUSTRIAL**
Pablo Sibione

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Valentín Gómez 3530 (C1191AAP)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0077-0
Primera edición

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Turano, Claudio
Nueva carpeta de matemática V / Claudio Turano ; Carlos Abdala ; Mónica Real ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2007.
160 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0077-0

1. Matemática. I. Abdala, Carlos II. Real, Mónica III. Schaposchnik, Ruth, coord. IV. Título
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en febrero de 2007 en Latingráfica. Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

# 5 CÓNICAS

**Si se corta un cono macizo de telgopor con una cuchilla, se puede observar que, de acuerdo con la inclinación de la hoja de la cuchilla, varía el contorno de las secciones que se obtienen. Es decir, esas *secciones cónicas* tienen forma de circunferencia si se coloca la hoja paralela a la base del cono; pero si se inclina la hoja, se obtienen otras curvas. Al referir esas curvas (o cónicas) a un par de ejes cartesianos, puede obtenerse una ecuación para cada una de ellas.**

**Cada cónica es un *lugar geométrico* porque todos los puntos que la forman cumplen determinadas características y, a su vez, todos los puntos que cumplen esas características pertenecen a ella.**

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# REVISIÓN INICIAL

**1** Consideren el punto *A* y la recta *r*.

a) Marquen un punto B que se halle a 2 cm de distancia de A. ¿Cuántas posibles ubicaciones hay para el punto B?

b) Marquen un punto C que se halle a 2 cm de distancia de la recta *r*. ¿Cuántas ubicaciones distintas puede haber para C?

c) Llamen D a un punto que esté simultáneamente a 2 cm de distancia de A y de *r*. ¿Es único el punto que cumple esta condición?

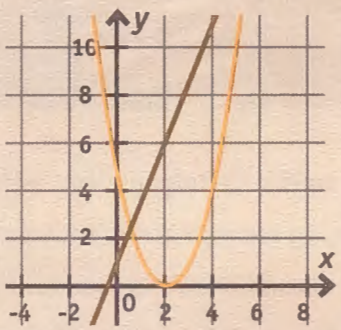
d) Marquen otros tres puntos que se hallen, respectivamente, a 3 cm, a 4 cm y a 5 cm de distancia simultáneamente de A y de *r*. ¿Cuántos puntos hay que se hallen a igual distancia de A que de *r*?

**2** Consideren un sistema de ejes cartesianos ortogonales. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambos ejes? Grafíquenlo.

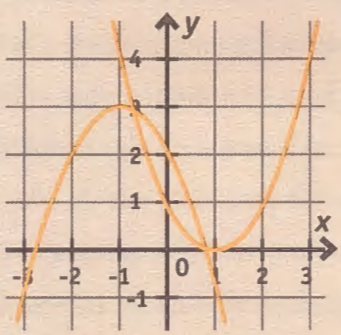
**3** ¿Cuántos puntos de intersección puede haber entre una parábola y una recta? ¿Y entre dos parábolas? Justifiquen y grafiquen las distintas situaciones.

**4** Hallen las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas en cada caso.

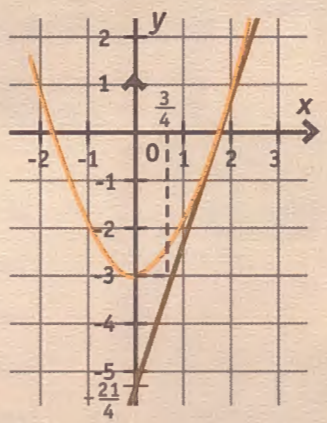
a)



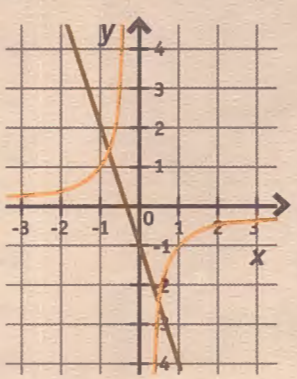

b)




c)




d)




© Aique Grupo Editor S.A. Prohibida su reproducción.

# Secciones cónicas

## Para leer y recordar

- Una recta que gira alrededor de otra recta, con la cual se corta en un punto fijo, genera una superficie cónica.

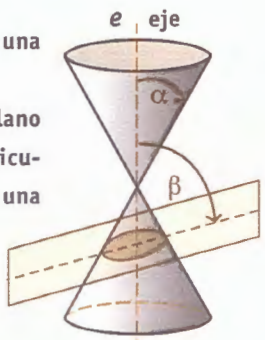
Por ejemplo, la *superficie cónica circular recta* de la figura es generada por la recta *g* (*generatriz*) que gira alrededor de la recta *e* (*eje*). El punto *V*, en el que se intersecan ambas rectas, es el vértice de la superficie cónica.

$\hat{\alpha}$: ángulo determinado por *e* y *g*.

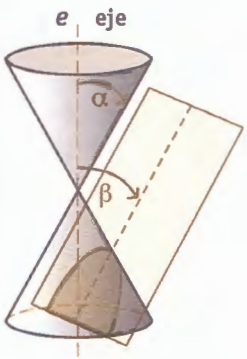
- Las secciones cónicas son curvas que resultan de la intersección de un plano (plano secante) con una superficie cónica circular recta. Este plano determina un ángulo β con el eje.
- Las siguientes secciones cónicas se obtienen como intersección de planos secantes que no incluyen el vértice de la superficie cónica.

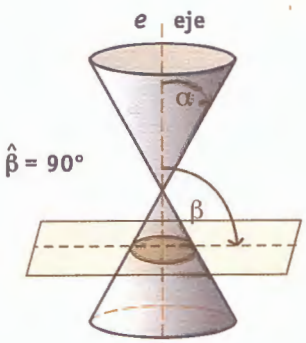
Si $\hat{\alpha} < \hat{\beta}$ la cónica es una *elipse*.

En particular, si el plano secante es perpendicular la eje, se obtiene una *circunferencia*

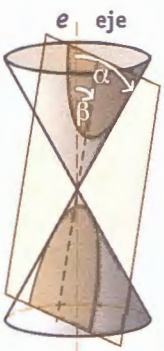



Si $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ la cónica es una una *parábola*.




Si $\hat{\alpha} > \hat{\beta}$ la cónica es una una *hipérbola*.




**5** Consideren un plano secante a una superficie cónica que pase por su vértice. En los casos que se mencionan a continuación indiquen, cuál figura se obtiene.

a) El plano es perpendicular al eje.

b) El plano es paralelo a la generatriz.

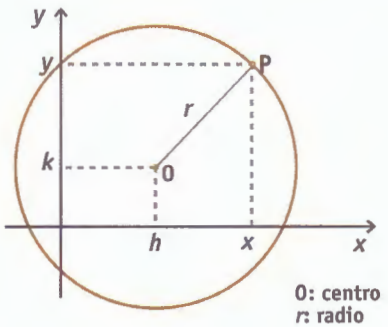
c) El plano contiene el eje.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Circunferencia

## Para leer y recordar

- La *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo llamado centro es constante.
- La ecuación de una circunferencia de centro en $O = (h; k)$ y radio $r$ ($r \in \mathbb{R}^+$) está dada por la fórmula $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.




**Ejemplos:**

- La ecuación de la circunferencia de centro $(4; -1)$ y radio 3 es $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

- Queremos saber si $x^2 + y^2 = 2y$ es la ecuación de una circunferencia.

Igualamos la ecuación a 0. ⟶ $x^2 + y^2 - 2y = 0$

Sumamos y restamos 1 para obtener un trinomio cuadrado perfecto y factorizamos. ⟶ $x^2 + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{(y-1)^2} - 1 = 0$

Despejamos los cuadrados y obtenemos la ecuación de una circunferencia de centro (0; 1) y radio 1. ⟶ $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

**6** Hallen la ecuación de las siguientes circunferencias de acuerdo con los datos indicados en cada caso.

a) Centro (0; 0) y radio 5.

b) Extremos de un diámetro (−1; −1) y (5; 5).

c) Tiene el mismo centro que la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = -2x$ y su radio es 3.

**7** Resuelvan analítica y gráficamente los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = 3x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 8y + 2 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases}$

**8** Encuentren el centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias.

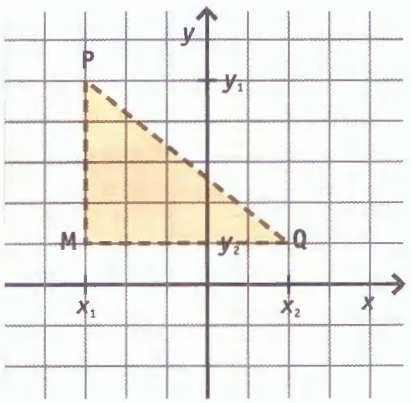
a) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 8y + 14 = 0$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Distancia entre dos puntos

## Para observar

Observen cómo se calcula la distancia entre los puntos $P = (x_1; y_1)$ y $Q = (x_2; y_2)$.



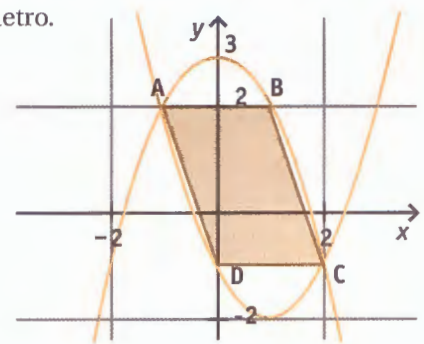

- Consideramos el triángulo rectángulo PMQ.
- Aplicamos el teorema de Pitágoras: $PQ^2 = MQ^2 + PM^2$

$MQ = (x_2 - x_1)$

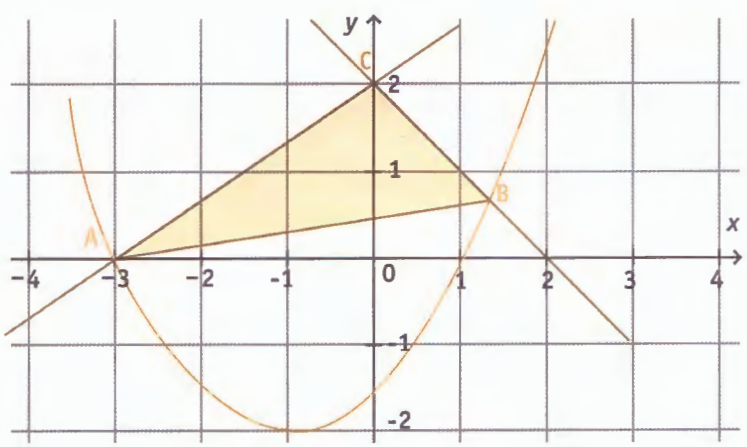
$PM = (y_2 - y_1)$

$Dist(P; Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

**9** Hallen las coordenadas de los vértices del cuadrilátero ABCD, clasifíquenlo y calculen su área y su perímetro.



**10** Hallen el perímetro del triángulo ABC de la figura.



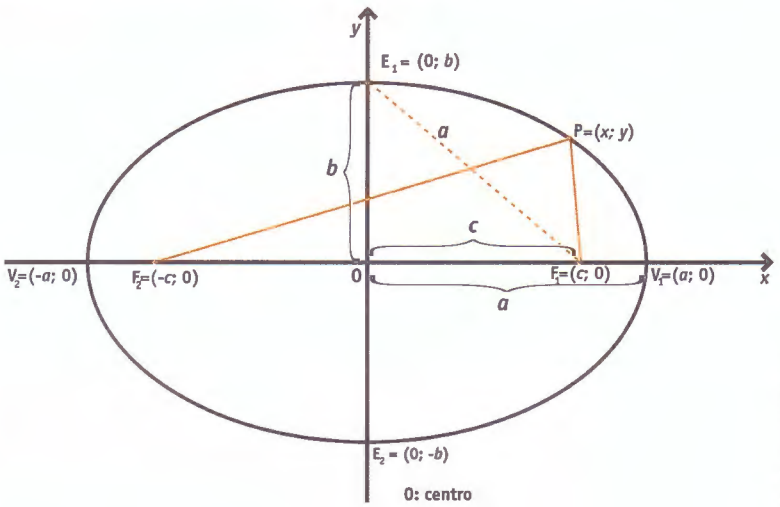

**11** ¿Cuántos puntos de intersección puede haber entre una parábola y una circunferencia? Ejemplifiquen cada caso mediante la ecuación y la representación gráfica de las cónicas involucradas. ¿Cuál es la diferencia entre estas representaciones y las gráficas de las dos actividades anteriores?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Elipse

## Para leer y recordar

- La *elipse* es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.
- La ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos sobre el eje de abscisas es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Si los focos están sobre el eje de ordenadas, la ecuación de la elipse es $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$.
- En ambos casos, se verifica que $a^2=b^2+c^2$.




0: centro
$F_1$ y $F_2$: focos
$V_1$ y $V_2$: vértices
$\overline{V_1V_2}$: eje mayor ⟶ $2a$
$\overline{E_1E_2}$: eje menor ⟶ $2b$
$\overline{F_1F_2}$: distancia focal ⟶ $2c$

**Ejemplos:**

- Para hallar la ecuación de la elipse de focos $F_1 = (3; 0)$ y $F_2 = (-3; 0)$, cuyo eje mayor es 10, procedemos así:

Hallamos $a$ resolviendo la ecuación $2a = 10 \Rightarrow a = 5$.

Hallamos $b$ mediante la relación $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = 4$.

La ecuación es, entonces, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

- En la ecuación $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{289}=1$, hallamos las coordenadas de los vértices y focos de la siguiente manera:

Los focos están sobre el eje $y$ porque $\sqrt{289} > \sqrt{64}$, entonces $a = \sqrt{289} = 17$; $b = \sqrt{64} = 8$ y $c = \sqrt{289 - 64} = 15$.

Entonces, $V_1 = (0; 17)$; $V_2 = (0; -17)$; $F_1 = (0; 8)$; $F_2 = (0; -8)$.

**12** Las siguientes ecuaciones representan elipses con centro en (0; 0). Hallen los focos y los vértices.

a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ c) $3x^2 + y^2 = 3$

**13** Tomen un vaso de vidrio de forma cilíndrica, ubíquenlo sobre una mesa horizontal y agréguele algún líquido, sin que quede totalmente lleno.

a) ¿Qué forma tiene la curva que se observa en el borde de la superficie del líquido si miran desde arriba?

b) Inclinen un poco el vaso. ¿Qué forma tiene ahora el borde de la superficie del líquido?

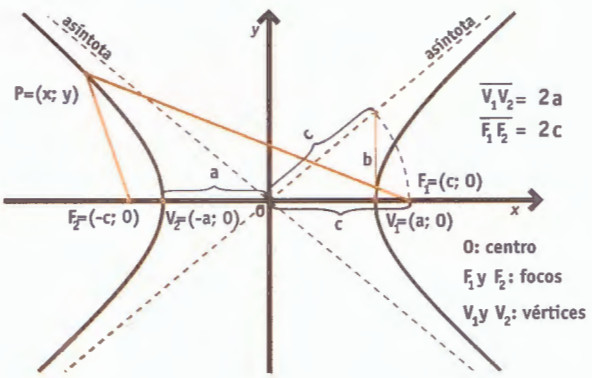
c) Supongan que el vaso esté apoyado sobre la mesa con centro en un sistema de coordenadas ortogonales. ¿En dirección a qué eje hay que inclinarlo para que los focos de la curva estén a 90° del eje de las abscisas?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Hipérbola

## Para leer y recordar

- La *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el módulo de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.
- La ecuación de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas y focos sobre el eje de abscisas es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Si los focos están sobre el eje de ordenadas, la ecuación es $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Las asíntotas de una hipérbola son las rectas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$.
- En ambos casos, se verifica que $c^2 = b^2 + a^2$.




Ejemplos:

• La ecuación de la hipérbola de focos $F_1 = (\sqrt{2}; 0)$ y $F_2 = (-\sqrt{2}; 0)$ y asíntotas $y = x$ e $y = -x$ se puede hallar de la siguiente manera:

Como $\frac{b}{a} = 1$ o $\frac{b}{a} = -1$, por las ecuaciones de las asíntotas, entonces $|a| = |b|$.

Reemplazamos en la expresión $c^2 = a^2 + b^2$ y obtenemos $(\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2$. Despejamos: $a^2 = 1$ y, por lo tanto, $b^2 = 1$. La ecuación buscada es: $x^2 - y^2 = 1$.

• Podemos hallar los focos de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, de la siguiente manera:
Reemplazamos los valores de $a$ y $b$ en la relación $c^2 = a^2 + b^2$ y obtenemos $c = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Como los focos están sobre el eje $x$ porque $\sqrt{9} > \sqrt{4}$, sus coordenadas son $F_1 = (\sqrt{13}; 0)$ y $F_2 = (-\sqrt{13}; 0)$, y las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -\frac{2}{3}x$.

**14** Las siguientes ecuaciones representan hipérbolas con centro en (0; 0). Encuentren los focos, los vértices y las asíntotas.

a) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ b) $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ c) $9x^2 - 16y^2 = 144$

**15** Sean las curvas $C_1 : y = \frac{k}{x}$; $C_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

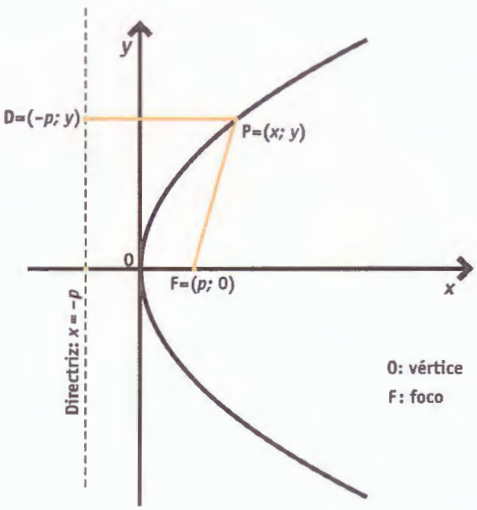
a) Escriban las fórmulas y representen gráficamente $C_1$ para $k = 2$ y $C_2$ para $a = b = 2$.
b) ¿Cómo se llama la gráfica obtenida en cada caso? Compárenlas.
c) Investiguen si algún movimiento puede transformar una gráfica en la otra.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Parábola

## Para leer y recordar

- La *parábola* es el lugar geométrico de los puntos tales que sus distancias a un punto fijo llamado *foco* y a una recta llamada *directriz* son iguales.
- La ecuación de una parábola con vértice en el origen y directriz de ecuación $x = -p$ es $y^2 = 4px$.
- Si la ecuación de la directriz es $y = -p$, la ecuación de la parábola es $x^2 = 4py$.




**Ejemplos:**

- La ecuación de la parábola de foco (5; 0) y directriz $x = -5$ es $y^2 = 4 \cdot 5x$, o sea, $y^2 = 20x$.

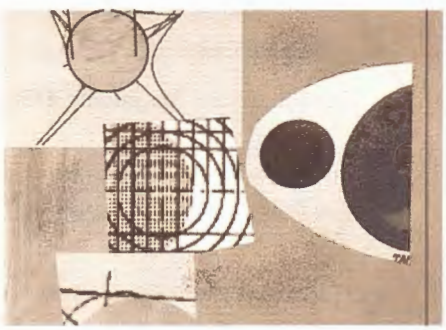
- Para hallar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de la parábola de ecuación $y^2 = -12x$, procedemos de la siguiente manera:

Igualamos $4p = -12 \Rightarrow p = -3$.

Entonces el foco es $F = (-3; 0)$, y la directriz, $x = 3$.

**16** Hallen las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de las parábolas cuyas ecuaciones son las siguientes.

a) $y^2 = x$ b) $y^2 = -8x$ c) $x^2 = 4y$

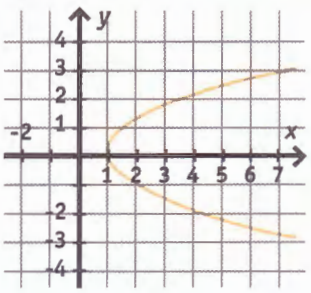


**17** Hallen la ecuación de las siguientes parábolas de acuerdo con los datos indicados en cada caso.

a) Foco en (4; 0) y directriz de ecuación $x = -4$.
b) Foco en (-12; 0) y directriz de ecuación $x = 12$.
c) Foco en (0; 8) y directriz de ecuación $x = -8$.

**18** Resuelvan analítica y gráficamente los siguientes sistemas.

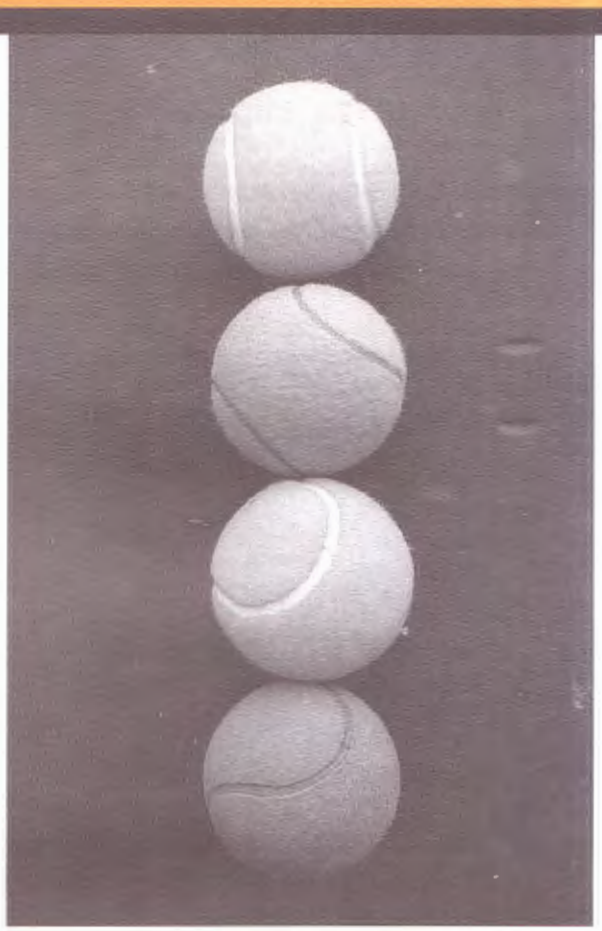
a) $\begin{cases} y^2 = -x \\ x + y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 = y \end{cases}$ c) $\begin{cases} y^2 - \frac{1}{2}x = 0 \\ (x-8)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$




**19** La parábola representada tiene vértice $(h\ ;\ k)$. Su fórmula general se puede encontrar a partir de los siguientes datos: foco $(h + p;\ k)$, directriz $x = h - c$ y fórmula general $(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$.

a) Escriban la fórmula.
b) ¿Es una función? ¿Por qué?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.



## Historia de las secciones cónicas

La palabra elipse proviene de la voz *ellipsis*, que significa 'deficiencia', y se utilizaba cuando un determinado rectángulo debía aplicarse a un segmento dado y resultaba escaso en un cuadrado o en otra figura. En cambio, hipérbola, 'avanzar más allá, se usaba en el caso en que el área excedía el segmento dado y parábola, (de 'colocar al lado' o 'comparar') indicaba que no había ni deficiencia ni exceso.

Durante aproximadamente 150 años, se habían referido a las secciones cónicas por la forma en que habían sido descubiertas: secciones de un cono agudo (*oxitoma*) secciones de un cono rectángulo (*ortotoma*), y secciones de un cono obtuso (*amblitoma*).

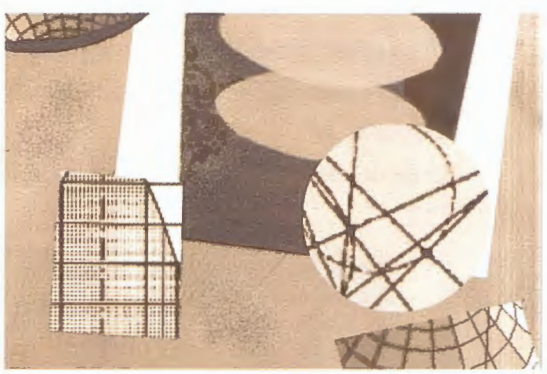
Arquímedes, aunque continuó utilizando estos nombres, también usó *parábola* como sinónimo de sección de un cono rectángulo.

Fue Apolonio de Praga (262 a 190 a. de C.) quien inició el uso de las palabras *elipse* e *hipérbola* para nombrar las secciones cónicas.

Algunos historiadores sostienen que esos nombres fueron adaptados de un uso anterior, posiblemente de los pitagóricos, como la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de aplicación de áreas.

Descartes determinó que, si se analiza el discriminante $B^2 - 4AC$ de la ecuación general de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, puede determinarse si esta describe una parábola, una elipse o una hipérbola.

- Si $B^2 - 4AC = 0$, describe una parábola.
- Si $B^2 - 4AC < 0$, describe una hipérbola .
- Si $B^2 - 4AC > 0$, describe una elipse.



**20** Indiquen qué sección cónica describen cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 + 4y^2 - 4x - 16y + 19 = 0$

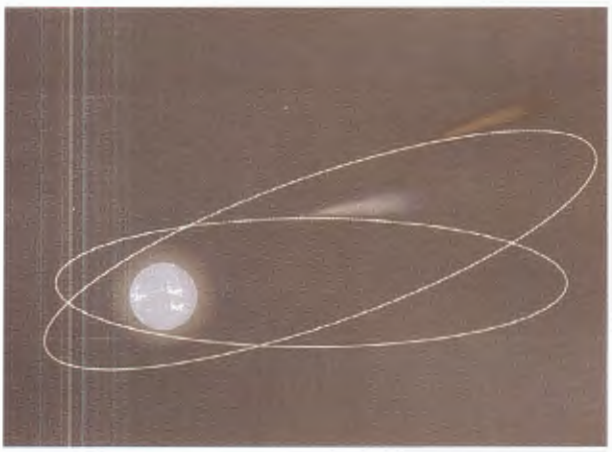
b) $x^2 + y^2 + 2xy - 4y - 1 = 0$

c) $-2x^2 + y^2 + xy + 2x + 2y + 1 = 0$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Trayectorias elípticas

Johannes Kepler (1571-1630) fue quien descubrió la forma verdadera de las órbitas planetarias. La primera de estas leyes afirma que las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de sus focos, aunque todas, excepto la de Mercurio, son casi circulares, incluso la de Júpiter, el mayor de los planetas. Todas las órbitas de los planetas se hallan aproximadamente en el mismo plano (llamado la eclíptica y definido por el plano de la órbita terrestre). La eclíptica está inclinada sólo 7 grados respecto al Ecuador del Sol. La "excentricidad" $e$ indica la distancia del Sol al centro de la órbita. Por ejemplo, "$e = 0{,}50$" indica que el Sol está a mitad de camino entre el centro de la órbita y un punto perteneciente a la elipse. La excentricidad de las elipses es siempre menor que 1 y cuanto más cercano a cero es, más se acerca la órbita a una circunferencia.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

**21** Los siguientes números corresponden a valores muy aproximados de la excentricidad de cada uno de los ocho planetas, sin embargo están desordenados.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0068 | 0,0543 | 0,2056 | 0,0460 | 0,0082 | 0,0484 | 0,0934 | 0,0167 |

Lean las consignas, decidan y completen cada casillero de la tabla.

a) Venus es el que tiene su órbita más cercana a una circunferencia.
b) La órbita de Mercurio es la más aplastada.
c) La suma de las órbitas de Mercurio y de Marte es 0,299, y su diferencia, 0,1122.
d) La órbita del mayor de los planetas es 0,0484.
e) La excentricidad de Saturno tiene como cifra de los centésimos un 5.
f) La excentricidad de la Tierra es un número que está entre la excentricidad de Urano y la de Mercurio.
g) La órbita de Neptuno es menos aplastada que la de Urano.

| Planeta | Mercurio | Venus | Tierra | Marte | Júpiter | Saturno | Urano | Neptuno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Excentricidad | | | | | | | | |

# MÁS ACTIVIDADES

**22** Mario es jardinero y quiere construir un cantero en forma de elipse sobre una superficie rectangular de 80 cm por 60 cm. Para ello, necesita ubicar los focos, clavar en ellos dos estacas y luego, con un piolín atado, trazar la elipse. ¿A qué distancia del centro debe ubicar los focos?

**23** Resuelvan los siguientes sistemas.

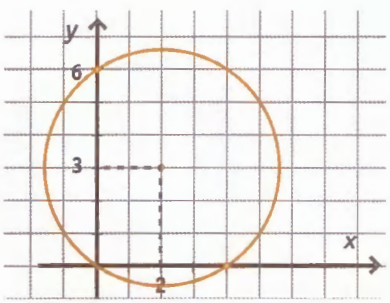
a) $\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y + 2 = (x-2)^2 \end{cases}$

**24**

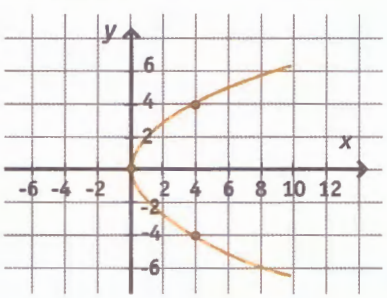
a) Encuentren las ecuaciones de las cónicas graficadas en cada una de las figuras.

b) Si se graficaran en un mismo par de ejes cartesianos, ¿cuáles serían los puntos de intersección entre ellas?

I.

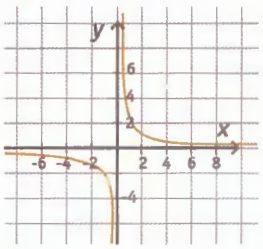



II.

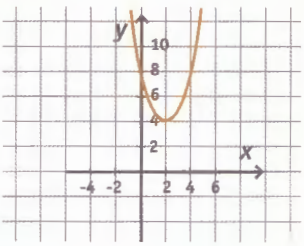



**25** Determinen cuál es la ecuación que corresponde a cada uno de los gráficos que se muestran a continuación.

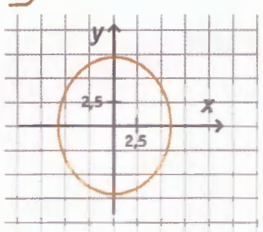
a)



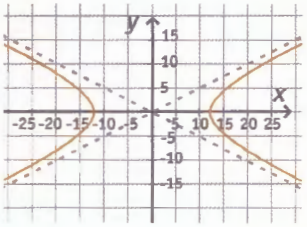

d)



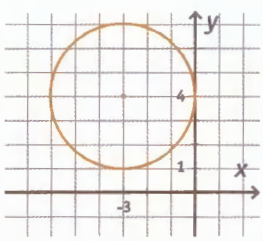

b)



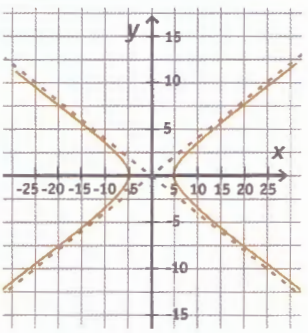

e)




c)




f)




I. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$

II. $y = (x+2)^2 + 4$

III. $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$

IV. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 9$

V. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

VI. $2x \,.\, y = 4$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

**1** La cónica $y^2 - 8x = 0$:

- a) es una elipse con eje mayor 2 y eje menor $\frac{1}{4}$.
- b) es una función cuadrática.
- c) es una parábola con ramas abiertas hacia la derecha.
- d) es una parábola con ramas abiertas hacia la izquierda.

**2** La ecuación de una circunferencia de centro (-2; 5) que contiene el punto (-2; 0) es:

- a) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$
- b) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 25$
- c) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 5$
- d) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 5$

**3** La recta que pasa por los puntos (1; 1) y (2; 2) corta la elipse de ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$:

- a) sólo en $\left(\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right)$.
- b) sólo en $\left(-\frac{12}{5}; -\frac{12}{5}\right)$.
- c) en $\left(\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right)$ y $\left(-\frac{12}{5}; -\frac{12}{5}\right)$.
- d) en $\left(\frac{12}{5}; -\frac{12}{5}\right)$ y $\left(-\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right)$.

**4** Las cónicas:

$$C_1 : 3x^2 - 3 = -\frac{1}{3}y^2 \quad C_2 : \frac{x^2}{2} - 2 = -\frac{y^2}{18}$$

- a) representan una elipse y una hipérbola.
- b) son dos elipses con eje mayor en el eje de las ordenadas.
- c) son dos elipses de iguales focos.
- d) son dos elipses con la misma excentricidad.

**5** La ecuación de la elipse de centro (0; 0) y que pasa por (0; −3) y (5; 0) es:

- a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
- b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$
- c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$
- d) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

**6** La ecuación de la hipérbola de vértices $v_1 = (2; 0)$ y $v_2 = (-2; 0)$ y asíntotas $y = 2x$ e $y = -2x$ es:

- a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$
- b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$
- c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$
- d) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

**7** La ecuación $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2 = 0$ corresponde a:

- a) una hipérbola.
- b) una circunferencia.
- c) una elipse.
- d) una parábola.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# ACTIVIDADES INTEGRADORAS

Consideren la función racional $C_1 : y = \frac{2}{x}$ y la parábola $C_2 : x + 4 = y^2$.

**1** Hallen la hipérbola asociada a $C_1$ provocada por un giro de $-45^\circ$ de su gráfica.

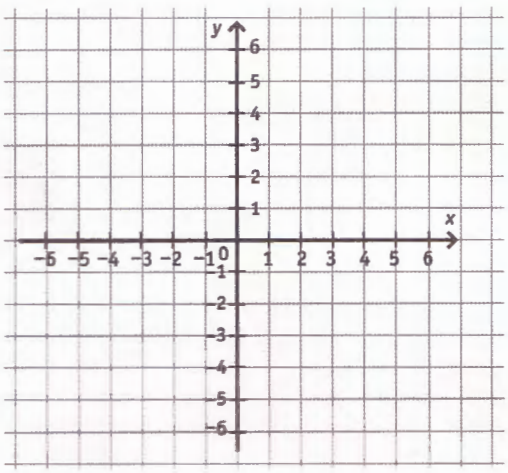
.....

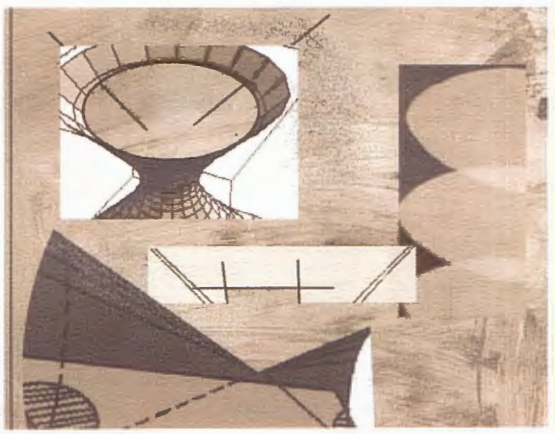
.....

.....

.....

**2** Representen en un mismo sistema de ejes la hipérbola encontrada y la gráfica de $C_2$.



**3** Calculen analíticamente las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas representadas.

.....

.....

.....

.....

**4** Clasifiquen el cuadrilátero con los puntos encontrados.

.....

**5** Hallen para ese cuadrilátero:

a) el área exacta.

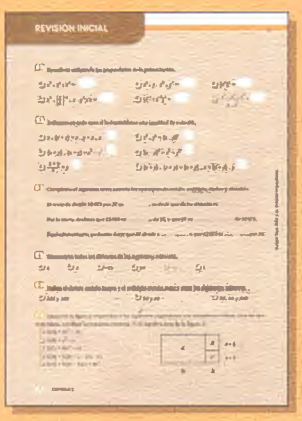
b) el perímetro exacto.

c) el seno, el coseno y la tangente exactos de los ángulos agudos. Exprésenlos con los denominadores racionalizados.

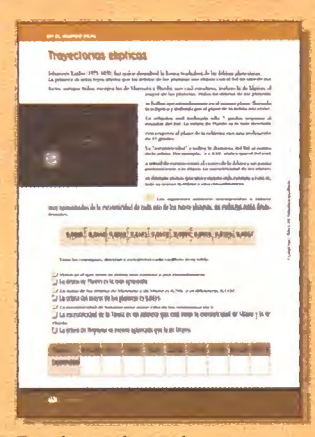
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Cómo son estos cuadernillos

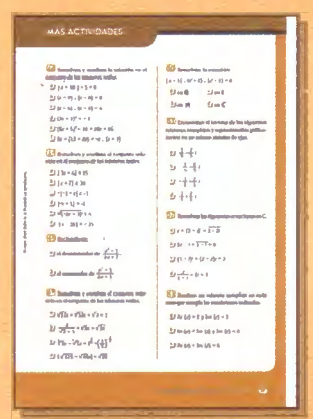
**Apertura**
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.



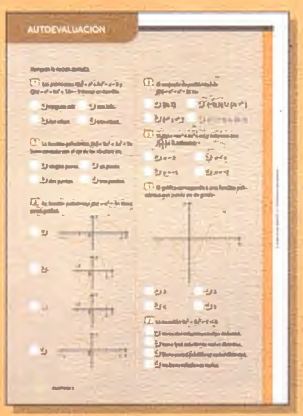

**Revisión inicial**
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.



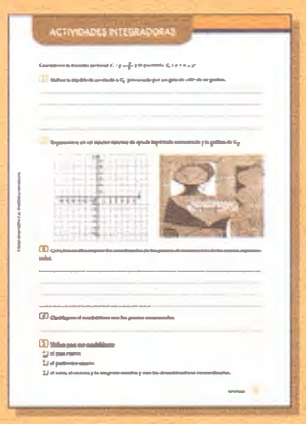

**En el mundo real**
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.



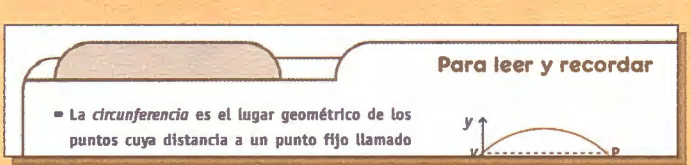

**Más actividades**
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



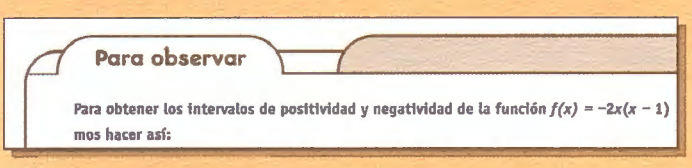

**Autoevaluación**
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.




**Actividades integradoras**
Al final de los cuadernillos 3 y 5, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.




Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).




Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE